A 42. ORTVAY RUDOLF FIZIKAI PROBLÉMAMEGOLDÓ VERSENY FELADATAI 2011. október 28 – november 7.

1. Mint tudjuk, a fák nem nőnek az égig. Kivéve a biotechnológiailag módosított gumiparti gumipálmákat. A kis egyenlítői ország közismerten emberbarát diktátora, dr. Absoluto Zero ugyanis elhatározta, hogy megkönnyíti népének a gumiszüret évszázadok óta űzött fáradságos műveletét. A gumipálmán termett gumibogyókat eddig létráról vagy a pálma törzsére mászva bottal verték le az ágakról. A dr. Absoluto Zero-ról elnevezett Gumiparti Biotechnológiai Kutatóintézet most hipermodern géntechnológiával megnövelte a gumibogyók rugalmasságát és pattogóképességét. Az Önszüretelő Gumiprojekt előterjesztői (köztük dr. Ali Tudde Mynek állami főfizikus, aki a Heaven Seven műhold lelövéséért már korábban megkapta az állami Coriolis-díjat) által felvázolt forgatókönyv szerint ezentúl elegendő lesz a gumifasor szélén álló gumipálmáról lecsúzlizni egyetlen gumibogyót. Ez a földre esve visszapattan, eltalálja és megrázza a szomszédos gumipálma lombozatát, onnan újabb gumibogyók esnek a földre, pattogásukkal további gumibogyók önszüreletését indukálva. (A szabványosított gumipálmák lombozata egységesen 137 cm sugarú kör, az érett bogyók egyenletesen oszlanak el a lombozatban. A gumiültetvényeken a pálmákat – dr. Absoluto Zero híres Rózsaszínű Könyvében leírt útmutatásának megfelelően – 3 méteres rácsállandójú háromszögrács rácspontjaiba ültetik. A gumipálma levelei hosszúkásak, szélük tüskés, felületük fényes világoszöld, fonákjuk tompa sötétzöld színű, enyhén ragacsos.)

   Sajnos – a diktátor legnagyobb szomorúságára – el kellett halasztani az első Önszüretelő Gumiültetvény ünnepélyes átadását, melyet a Gumiérés Ünnepére terveztek. A gumipálmák ugyanis még nem nőttek elég magasra ahhoz, hogy beindulhasson a szomszéd pálmákat önszüretelésre indító láncreakció. Számítsuk ki, mekkorára kell nőnie a gumiparti szorgos nép jogos büszkeségét nyílegyenesen magasba törő törzsükkel évszázadok óta jelképező gumipálmáknak, hogy a gumiszüretelő munkások legnagyobb örömére megindulhasson az automata gumiszüret (melynek termését a világ gumitőzsdéi is feszült figyelemmel várják)!

   (Dávid Gyula)

2. Az űrrepülőgép visszatérve a Föld légkörébe 100 km magasságból vízszintesen mérve 450 km távolságra képes siklani. Leszállást kísérelünk meg egy gömb alakú kisbolygón. A kisbolygó szilárd kérgének sugara 100 km, és légkörében az űrrepülőgép ugyanakkora szögben tud siklani, mint a Föld légkörében! Mekkora távolságra tudna siklani (a kisbolygó felszínén mérve) 100 km magasságból az űrrepülőgép?

   (Ráczkevi Béla)

3. Egyszerű játék a jojó, de tartogat meglepetéseket! Vizsgáljuk a következő jojót: két egymással teljesen megegyező párhuzamos R sugarú tárcsa között egy $d \ll R$ magasságú r_0 sugarú henger alakú – a tárcsákra merőlegesen beékelt – forgástengely található. Erre rácsévélünk egy l hosszúságú, d vastagságú fonalat. A jojó tehetetlenségi nyomatéka ekkor jó közelítéssel $\theta = \frac{1}{2}mR^2$. A fonal végét a kezünkben tartva elengedjük a jojót és hagyjuk, hogy függőleges mozgást végezzen. Adjuk meg a jojó tömegközéppontjának az $a(x)$ gyorsulását, $v(x)$ sebességét a letekeredett fonál hosszának függvényében, ahol x a letekeredett fonál hossza! Általunk szabadon választott paraméterekkel ábrázoljuk is ezeket a függvényeket a $[0, l]$ intervallumon! Adjuk meg az idő függvényében a letekeredett fonal hosszát! Mennyi idő alatt tekeredik le az összes fonal? Ábrázoljuk az általunk választott paraméterekkel a $t(x)$ függvényt! Az x mely értékénél maximális a tömegközéppont sebessége? Legyen $\alpha = r_0/R$, ábrázoljuk α függvényében a sebességfüggvény maximumhelyét és a fonál teljes letekeredésének idejét! Milyen érdekességet vehetünk észre? Számításaink során hanyagoljuk el a súrlódást és a fonál tömegét, és tételezzük fel a jojó folyamatos, csúszásmentes legördülését!

   (Homa Gábor)

4. Egy csillagász szerette volna megtudni, hogy a házának mik a földrajzi koordinátái. Mivel nem volt GPS-e, ezért megfigyelte a napfelkeltét. Mivel tudta, hogy az időt sokkal pontosabban tudja mérni, mint az irányt, ezért csak a napfelkelte idejét mérte meg. A Nap első sugarait a következő időpontokban figyelte meg (GMT):

Dátum	2010.10.28	2010.11.15	2010.11.24	2010.11.25	2010.12.10	2010.12.11
Időpont	8:23:31 ±5 sec	8:50:16 ±10 sec	9:04:55 ±15 sec	9:05:25 ±10 sec	9:22:15 ±5 sec	9:23:02 ±3 sec

2011 01.28	2011.02.07	2011.02.15	2011.03.09	2011.04.04	2011.04.11	2011.05.10
9:17:25 ±10 sec	9:03:25 ±5 sec	8:51 ±30 sec	8:11:32 ±10 sec	7:20:05 ±15 sec	7:06:45 ±10 sec	6:20: ±2 min

   Mik a házának a megfigyelésekből számítható földrajzi koordinátái?

   (Horváth István)

5. Függőleges tengelyű, rögzített, henger alakú hosszú cső belső falához egy kis, r sugarú tömör gumilabdát szorítunk. A gumilabdát elegendően nagy vízszintes v_0 sebességgel elindítjuk, így a labda a cső R belső sugarú falával mindvégig érintkezve érdekes mozgásba kezd. Írjuk le a gumilabda középpontjának táncát! (A tapadási súrlódás elegendően nagy ahhoz, hogy a labda mozgása során ne csússzon meg.)

(Vigh Máté)

6. A Jégcirkusz új szenzációja a forgó jégpálya! Ez egy hatalmas, vízszintes felületű, állandó szögsebességgel forgó jégkorong. Vizsgáljuk meg a korcsolyázók mozgását a forgó jégen! Az idealizált korcsolya egy vékony penge, amely csak az éle irányában tud elmozdulni, és ezt a mozgást súrlódási erő nem gátolja. Az élre merőleges elmozdulásokat azonban a korcsolya és a jég között fellépő erőhatások megakadályozzák. Számítsuk ki a korcsolyázók mozgásának lehetséges pályáit, és vázoljuk fel e görbéket! Milyen paraméterektől függ, hogy a lehetséges görbetípusok közül melyik valósul meg a mozgás során?

(Dávid Gyula és Cserti József)

7. Egy ködkamra közepén Q töltésű, kicsiny R sugarú fémgömb helyezkedik el. A fémgömb közelében, annak töltésével ellentétes $-q$ töltésű, klasszikusnak tekinthető részecske mozog, melynek mozgását a sebesség négyzetével arányos, az elektrosztatikus erőhöz képest kicsiny $\mathbf{F}_{\mathrm{drag}} = -C|\mathbf{v}|\mathbf{v}$ közegellenállási erő fékezi, ahol C a közeg térben homogén sűrűsége miatt állandó. (A gravitáció hatása és az elektromos megosztás a továbbiakban elhanyagolható.)
a) Vizsgáljuk a töltött részecske mozgását, ha a pályája kezdetben közelítőleg kör! Hogyan változik az időben a részecske fémgömbtől mért távolsága, sebességének nagysága? Mekkora a részecskére ható eredő erő pályamenti komponense? Készítsünk vektoros magyarázó ábrát a részecskére ható erőkről!
b) Vizsgáljuk a töltött részecske mozgását, ha a részecske pályája kezdetben elnyújtott, ellipszisszerű! Hogyan változik a részecske (fémgömb középpontjára vonatkozó) impulzusmomentuma a befutott ívhossz függvényében? Hogyan változik a részecske pályájának alakja: még jobban elnyúlik vagy kikerekedik? Miért? Ha tudunk, adjunk középiskolások számára is érthető, egyszerű magyarázatot a jelenségre!

(Honyek Gyula és Vigh Máté)

8. Szabálytalan, „krumpli alakú” aszteroida mozog egy gyengén inhomogén, centrális $V(r)$ potenciáltérben. Számítsuk ki az aszteroidára ható árapály-forgatónyomatékot, és fejezzük ki az eredményt a test tömegközépponti tehetetlenségi nyomaték tenzorával, valamint a potenciál adataival! Specializáljuk a feladatot a Nap körüli körpályán mozgó, (lapult vagy hosszúkás) forgási ellipszoid alakú kisbolygóra, és adjuk meg a forgatónyomaték képletét a keringési idő, a főtehetetlenségi nyomatékok, valamint a test szimmetriatengelyének a keringési sík normálisától mért szöge segítségével!

(Dávid Gyula)

9. Két, nagyobbik alaplapjukkal egymáshoz illesztett csonka kúpból álló „hordó” gurul lefelé két nagyon vékony párhuzamos sínből álló lejtőn. A közegellenállást modellezzük a tömegközéppont sebességével egyenesen arányos erővel! Milyen sebességnél lesz a hordó gurulása instabil? Tudunk-e olyan testet tervezni, ami egy bizonyos sebesség *felett* tud stabilan gurulni?

(Bodor András)

10. A Gurulosz bolygó körpályán mozog napja körül, forgástengelye benne fekszik a keringés síkjában. A bolygón szó szerint három nap egy esztendő. Milyen pályán mozog a bolygó napja az égen a) a sarkon, b) az egyenlítőn, c) a mérsékelt szélességi körökön elhelyezkedő megfigyelő szempontjából? Milyenek lehetnek az évszakok a Guruloszon, ha a főbb planetológiai paraméterek (naptávolság, besugárzás, átlagos felszíni hőmérséklet és nyomás, a légkör és a hidroszféra összetétele) és az év hossza megegyezik a Földével?

(Dávid Gyula)

11. Egy gömb alakú bolygó körül egyenlítői szinkronpályán műsorszóró műholdak keringenek, és ultrarövid hullámon ontják magukból a reklámot meg a popklipeket. A bolygó lakói az óceánokat már régen kiszárították, a bolygó felszínének minden talpalatnyi helyét beépítették, a lakosság az egész felszínen egyenletesen oszlik el. A média irányítóit zavarja, hogy a műholdak adása nem jut el minden lakoshoz, ezért megbízzák a tudósokat, határozzák meg, hogy a lakosságnak mekkora hányada tudja venni a szinkronpályáról érkező adásokat. Fejezzük ki ezt az arányt a sarkon és az egyenlítőn mérhető effektív gravitációs gyorsulás segítségével!

(Dávid Gyula)

12. Egy szuperszonikus vadászgép nyugalmi helyzetből indulva huzamos ideig állandó a gyorsulással mozog egyenes pályán. Ekkor a szokásos hangrobbanás mellett bizonyos helyeken és időpontban egy felerősödött „szuper-hangrobbanást” lehet hallani. Határozzuk meg analitikusan a szuper-hangrobbanás vadászgéphez viszonyított helyzetét az indítástól számított idő függvényében! Számítsuk ki és ábrázoljuk a vadászgép által kibocsátott hanghullámok burkolóját is! Mi jelzi a burkológörbén a szuper-hangrobbanást?

(Bodor András)

13. Mint köztudott, az atlantiszi civilizáció 9000 évvel ezelőtt, a tenger mélyén, a Falkland-szigetek közti tengerszoros mélyén virágzott. Nyomait Lee ben Canal, a messewani egyetem kutatója fedezte fel A. C. Boowar segítségével. A kutatópár most megtalálta a tenger fenekén épült atlantiszi csillagvizsgáló főműszerének óragépét. Az atlantiszi finommechanikai ipar eme remekműve tette lehetővé, hogy a tenger fenekén álló távcső folyamatosan kövesse az égbolton vándorló csillagok látszólagos napi útját a víz alól látható égbolton. Számítsuk ki, hogy a különböző deklinációjú csillagok milyen utat tettek meg egy éjszaka alatt az atlantisziak tenger alól szemlélt égboltján, és rajzoljuk is le ezeket a görbéket!

(Dávid Gyula)

14. Ismert, hogy ha egy töltött részecske közegben a közegbeli fénysebességnél nagyobb sebességgel egyenes pályán mozog, akkor kúp alakban Cserenkov-sugárzás keletkezik. Adjuk meg egy a helyi fénysebességnél nagyobb kerületi sebességű egyenletes körmozgást végző töltött részecske által kiváltott Cserenkov-sugárzás hullámfrontjának alakját a körpálya síkjában! Milyen ismert görbékkel írható le a hullámfront alakja a kör síkjának különböző tartományaiban? Ábrázoljuk a hullámfrontot különböző v/c arányok esetén, ahol v a részecske sebessége, c pedig a közegbeli fénysebesség!

(Bodor András és Vigh Máté)

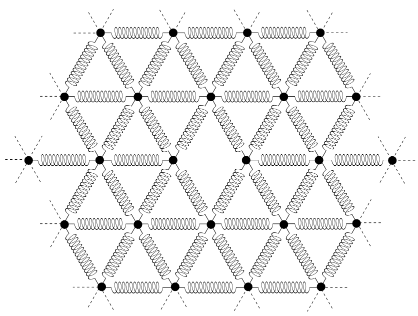
15. Határozzuk meg egy N egyforma golyóból és az őket összekötő N egyforma rugóból álló lineáris lánc frekvencia-spektrumát, ha a szokásos periodikus határfeltétel helyett az alábbi feltételt írjuk elő:

$$u_N(t) = u_0(t + \tau),$$

ahol τ egy rögzített késleltetési idő. Vizsgáljuk a módusok ortogonalitását!

(Tichy Géza, az Ortvay verseny egyik alapítója)

16. Végtelen, szabályos háromszögrácsban elhelyezkedő pontszerű m tömegű golyókat D direkciós erejű ideális rugók kötik össze, kivéve két szomszédos golyót, amelyek között kivettük a rugót (lásd a mellékelt ábrát). A golyók a háromszögrács síkjában mozoghatnak. Hogyan változnak a rácsi rezgéseinek frekvenciái a tökéletes rácshoz (ha nem vesszük ki a rugót) képest? Határozzuk meg numerikusan a rács rezgéseinek frekvenciáit!



(Cserti József és Tichy Géza, az Ortvay verseny egyik alapítója)

17. Számítsuk ki a szimmetriatengelye körül ω szögsebességgel forgó homogén, rugalmas, R sugarú gömb deformációját a gömb tetszőleges pontjában a Hooke-törvény érvényességi tartományán belül!
Becsüljük meg a radiális deformáció nagyságát egy $R = 1$ m sugarú, $f = 10\,000\,\frac{1}{\text{perc}}$ fordulatszámmal forgó rézgömb pólusainál, illetve az egyenlítőjénél!

(Cserti József)

18. Folyadékkal telt edény alján egy gázbuborék ül. Milyen alakú és mekkora lehet, amikor egyensúlyban van? A folyadék és a gáz fajsúlya γ_1, illetve γ_2, a felületi feszültség α, és az illeszkedési szög (a folyadék–szilárd és folyadék–gáz felületek által bezárt szög) ϑ. A konkrét számolásban legyen $\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2 = 10^4\,\mathrm{N/m^3}$, $\alpha = 0{,}07\,\mathrm{J/m^2}$ és $\vartheta = 5°$!

(Woynarovich Ferenc)

19. Nagyobb intenzitással tudunk fújni, mint szívni. Ezzel kapcsolatban vizsgáljuk meg a Navier–Stokes-egyenlet szimmetria-tulajdonságait!

(Tichy Géza, az Ortvay verseny egyik alapítója)

20. Elektromosan gerjesztett, vékony korong alakú piezoelektromos kristállyal ultrahang-hullámokat hozunk létre vízben. A korong egyik oldalán keletkező, onnan kiinduló longitudinális hullámokat vizsgáljuk, a korong középpontján áthaladó, a korong síkjára merőleges egyenes mentén. Meglepődve tapasztaljuk, hogy a korongtól 6 cm-re a mért intenzitás zérus. Növelve a távolságot, újra lesz mérhető intenzitás, amely egy maximum elérése után, a távolság növelése közben folyamatosan, mindvégig csökken.
a) Mit tapasztalnánk, ha csökkentenénk a 6 cm-es távolságot?
b) Mekkora a korong átmérője? A korong rezgésének frekvenciája 5 MHz, a hang sebessége a vízben 1500 m/s.

(Radnai Gyula)

21. Készítsünk az ingaórához olyan gátló szerkezetet, ami nem ketyeg! A problémát megoldhatjuk mágnesekkel, ehhez manapság elég erős mágneseket lehet beszerezni. Kiindulásként gondolhatunk a klasszikus szerkezettel analóg elrendezésre, ahol a forgást nem fogak akasztják meg, hanem egymáshoz közel kerülő mágnesek.
a) Hogyan nézhet ki egy ilyen gátló szerkezet? (Gondoljunk arra, hogy az ingát is gerjeszteni kell valahogyan, különben megáll!)
b) Az inga csillapításának ellensúlyozásához mekkora energiát képes átadni a kerék az ingának?
c) Mi a feltétele annak, hogy ne váljon kaotikussá a mozgás?

(ifj. Radnóczi György)

22. Mágneses térbe helyezett, egyenletes térfogati töltéssűrűségű és tömegeloszlású, Q töltésű, m tömegű szigetelő gyöngyöt $\boldsymbol{\omega}_0$ szögsebességgel megforgatunk és $\mathbf{v}_0$ sebességgel megpöccintünk.
a) Írjuk fel a gyöngy mozgás- és forgásegyenleteit minél egyszerűbb alakban, de a mágneses tér hely szerinti sorfejtésénél csak a nulladrendű (homogén tér) és az elsőrendű (gradienst tartalmazó) részt vegyük figyelembe!
b) Oldjuk meg az egyenleteket homogén mágneses térben, azaz legyen $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = (0, 0, B_0)$, az egyszerűség kedvéért $\mathbf{v}_0 = (v_0, 0, 0)$, $\boldsymbol{\omega}_0$ pedig tetszőleges!
c) Oldjuk meg az egyenleteket egyenletes térbeli változású mágneses térben, azaz legyen $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = (0, 0, B_0 + \alpha y)$, $\mathbf{v}_0 = (v_0, 0, 0)$, $\boldsymbol{\omega}_0 = (0, 0, \omega_0)$!
d) A c) kérdésben szereplő esetre rajzoljuk ki a gyöngy tömegközéppontjának pályáját a paraméterek néhány konkrét értékére! Mennyiben térnek el a gyöngy pályái egy ugyanilyen mágneses térben mozgó, Q töltésű, m tömegű pontszerű töltés pályájától?

(Vigh Máté)

23. Egy plánparalel lemez lapjai az $x = 0$ és $x = \lambda_0$ síkokban helyezkednek el. A lapokra merőlegesen λ_0 hullámhosszú elektromágneses síkhullám érkezik. A lemez törésmutatója x irányban változik. A bejövő intenzitás mekkora részét ereszti át a lemez, ha a törésmutató $n(x) = 1 + x/\lambda_0$? Határozzuk meg a rendszer transzfer mátrixát! Adjuk meg a transzfer mátrixot tetszőleges $n(x)$ esetén (x irányú síkhullámokra)!
Útmutatás: Osszuk fel a lemezt gondolatban az x irányban N vékony rétegre! Ezekre számoljuk ki a transzfer mátrixot, majd vegyük $N \to \infty$ határesetet!

(Lájer Márton)

24. Már ahhoz is, hogy a közeli csillagokhoz emberi idő alatt eljussunk, relativisztikus sebességű űrhajóra van szükség. Egyik javasolt meghajtási mód az antianyag-hajtómű: az űrhajó üzemanyaga annihilálódó anyag és antianyag, és a hajó hajtóanyagot is visz magával, amit az annihilációból nyert energiával gyorsítva lő ki.

Tegyük fel, hogy űrhajónk hajtóműve ideális, azaz amellett, hogy az egységnyi idő alatt kilőtt hajtóanyag mennyisége és ennek gyorsítására fordított energia (tehát a teljesítmény) egymástól függetlenül tetszés szerint szabályozható, a hatékonyság is 100%: az éppen felhasznált annihilálódó üzemanyag teljes tömege az éppen kilövődő hajtóanyag mozgási energiájává alakul! Mégis szeretnénk a lehető legkevesebb antianyagot fogyasztani (azaz adott mennyiségű antianyagot a leghatékonyabban kihasználni). Hogyan vezéreljük ehhez a hajtóművünket (a teljesítményét és a hajtóanyag-felhasználást)?

Legyen űrhajónk „hasznos” (üzemanyag és hajtóanyag nélküli) tömege 10000 tonna, és egyszeri tankolással 200000 km/s-es sebességre tudjon felgyorsítani, majd meg is állni! Határozzuk meg, hogy mennyi antianyagra van szükség, mennyi hajtóanyagra, illetve mekkora maximális teljesítményűnek kell lennie a hajtóműnek, ha az űrhajósok gyorsításkor végig a Földön megszokott, kényelmes 1 g-nyi súlyukat szeretnék érezni! Hasonlítsuk össze ezeket az értékeket az emberiség jelenlegi összes energiafelhasználásával!

(Nagy Márton)

25. A Nordström-féle gravitációs elméletben (1912) a gravitációs térerősséget – a newtoni esethez hasonlóan – egy skalármező gradienseként kaphatjuk meg. Az M nyugalmi tömegű testre ható erő kiszámításakor ezt még szorozni kell a test tömegével: $F_k = M\,\partial_k \Phi$. Vizsgáljuk meg az elmélet keretein belül a sztatikus centrális potenciáltérben kialakuló mozgások szabályait, és számítsuk ki a kötött mozgás pályáját a közismert $\Phi(r) = -\alpha/r$ Kepler-potenciál esetén!

(Dávid Gyula)

26. Zweistein professzor új elmélete szerint a hipergravitációs erő egy Φ hiperpotenciál gradiensével adható meg, ezt szorozza egy csatolási állandó, amely fordítva arányos a hiperpotenciálban mozgó részecske M nyugalmi tömegével: $F_k = (K/M)\,\partial_k \Phi$, ahol Φ a hiperpotenciál, M a nyugalmi tömeg, K pedig egy $(\text{tömeg})^2$ dimenziójú állandó. Vizsgáljuk meg egy kezdetben (a $t = 0$ pillanatban) nyugalomban lévő, m nyugalmi tömegű részecske mozgását, kövessük nyomon a mozgás során az energia és az impulzus változását! Elemezzük részletesen a homogén hipergravitációs térben ($\Phi = g\,z$, ahol g megegyezik a földi gravitációs gyorsulással) lezajló mozgást! Mennyi idővel a mozgás kezdete után jelentkeznek a relativisztikus effektusok? Mi lesz a részecske sorsa hosszú idő elmúltával?

(Dávid Gyula)

27. Adott egy térben rögzített, R sugarú, konstans ρ sűrűségű körgyűrű. Helyezzünk egy m tömegű pontszerű testet abba a pontba a gyűrű középpontját – a gyűrű síkjára merőlegesen – átdöfő egyenesen, ahol a testre ható gravitációs erő a legnagyobb! Legyen a test tömege $m = 1$ kg, a gyűrű sugara $R = 1$ m, a gyűrű vonalmenti sűrűsége $\rho = 1\,\mathrm{kg/m}$ és a gravitációs állandó $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}\mathrm{Nm^2/kg^2}$. Mekkora a test mozgására jellemző periódusidő, ha a testre a gyűrű által kifejtett gravitációs erőn kívül nem hat más erő, és a test kezdetben nyugalomban van? Próbáljuk meg minél pontosabban meghatározni a Bohr–Sommerfeld-féle kvantumfeltétel segítségével a lehetséges energiaszinteket általános ρ, m, γ, R paraméterek mellett!

(Homa Gábor)

28. A pozitrónium egy olyan „hidrogénatom”, amelyben a proton helyett egy pozitron játssza az „atommag” szerepét. Pozitrónium létezik, csak érthető módon nem él végtelen sokáig: nanoszekundumok alatt annihilál egymással az elektron és a pozitron. Mekkora a pozitrónium-atom mérete a hidrogénatom méretéhez képest?

(Major János, az Ortvay verseny egyik alapítója)

29. Mint Douglas Adamstól tudjuk (Galaxis Útikalauz Stopposoknak), a Földet a szuperintelligens egerek megrendelésére készítették, azaz a bolygó egy olyan számítógép, amelynek feladata megtalálni a Végső Kérdést, melyre a válasz 42 (ami egyben a válasz „az Életre, a Világmindenségre, meg Mindenre”). A következő fizikai tény is a Választ illusztrálja. Ismeretes, hogy a háromdimenziós izotróp harmonikus oszcillátor sajátenergiáit az n, l, m kvantumszámok a következőképpen határozzák meg: $E_{n,l,m} = \hbar\omega(2n + l + \frac{3}{2})$. Határozzuk meg a harmonikus oszcillátor mágikus számait! Mutassuk meg, hogy a 42. mágikus szám számjegyei összegének kétszerese éppen 42 !

(Homa Gábor)

30. Tekintsünk egy egyforma atomokból álló, nagyon hosszú, egydimenziós lineáris láncot! (Az atomok száma legyen N, ahol $N \to \infty$). Minden atom járuljon egyetlen elektronnal a vezetési sávhoz, a többi elektron legyen mind erősen kötött állapotban. Vizsgáljuk a vezetési elektronokat szoros kötésű (tight binding) közelítésben!
a) Tekintsük először az (egyensúlyi) egyenlőközű esetet: a szomszédos atomok távolsága legyen a_0, a hopping integrál legyen t_0! Határozzuk meg a vezetési elektronok energiájának hullámszám-függését, az $\varepsilon_0(k)$ diszperziós relációt!
b) Tekintsük ezután a dimerizálódott esetet, amikor az egymás után következő kötések hossza szabályosan alternál! Írjuk ezt le a következőképpen: minden páratlan sorszámú atom balra, minden páros sorszámú atom jobbra kimozdul egyensúlyi helyéről, ugyanazzal az u értékkel, vagyis $u_n = (-1)^n u$! Tegyük föl, hogy (kis kimozdulásokra) a hopping integrál értéke lineárisan függ a köteshosszától: $t = t_0 + \alpha(a - a_0)$. Határozzuk meg ennél a torzult geometriánál is a vezetési elektronok energiájának hullámszám-függését, az $\varepsilon(k)$ diszperziós relációt!
c) Mutassuk meg, hogy a vezetési elektronok összenergiája lecsökken a dimerizálódás hatására! Mekkora ez a csökkenés, és hogyan függ a dimerizálódás mértékét jellemző u-tól?
d) A többi elektron hatását rugalmas közelítésben vegyük figyelembe: a dimerizálódás során a rugalmas energia Ku^2-tel nő az egyensúlyi energiához képest. Milyen u^0 értéknél lesz a teljes energia (rugalmas és a vezetési elektronoké) minimális?

(Kürti Jenő)

31. Tekintsünk egy z tengelyű, R_0 sugarú hengeres csőben $V(z) = Dz^2/2$ potenciálban lévő elektront! Milyen pályák alakulnak ki, ha rákapcsolunk $\mathbf{B} = (B_r, B_\varphi, B_z) = (-\beta r/2,\, 0,\, B_0 + \beta z)$ mágneses teret ((r, φ, z) a hengerkoordinátákat jelöli)? (*Útmutatás:* egzaktul számoljunk azon β-t és B_0-t tartalmazó tagokkal, amelyek nem rontják el a Pauli-egyenlet szeparálhatóságát, a maradék legyen perturbáció.)
a) Definiáljuk és számítsuk ki a spin–pálya csatolást erre a rendszerre!
b) Hogyan értelmezhető a Stern–Gerlach kísérlet a fönti számításokból? (Tényleg bizonyítja, hogy a perdület, ill. mágneses momentum csak kvantáltan állhat a külső mágneses térhez képest?)

(Fehér Titusz)

32. Vizsgáljuk meg egy tömeg nélküli, egy dimenzióban mozgó fermion szóródását egy lokalizált $\mathbf{S}$ spinen (a spin-flip effektusokat hanyagoljuk el)! Ilyen rendszer előfordulhat például egy kétdimenziós topologikus szigetelő felületén. Számítsuk ki a probléma szórási mátrixát, és hasonlítsuk össze a kapott eredményt egy nemrelativisztikus részecske hasonló szórási problémájával! A két vizsgált Hamilton-operátor legyen

$$\hat{H}_1 = v\hat{p}_z\sigma_z + \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma}\,\delta(z),$$
$$\hat{H}_2 = \frac{\hat{p}_z^2}{2m}\sigma_0 + \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma}\,\delta(z),$$

ahol $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ a Pauli-mátrixokból képzett vektor, és σ_0 az egységmátrix.

(Oroszlány László)

33. Általánosítsuk a kétdimenziós, zérus nyugalmi tömegű Dirac-egyenletet! Legyen a részecske (x, y), kétdimenziós síkban történő mozgását leíró Hamilton-operátor: $H = v\,\mathbf{S}\mathbf{p}$, ahol v egy sebesség dimenziójú paraméter, $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ a részecske impulzusa, $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$ az S spinű spin-operátor mátrixa ($S = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \cdots$, azaz egész vagy félegész szám). Határozzuk meg a Q töltésű részecske $E_n(B)$ Landau-nívóit $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ homogén mágneses térben! Milyen értékeket vehet fel az n index? Írjunk algoritmust a Landau-nívókat meghatározó szekuláris egyenletre! Számítsuk ki analitikusan a Landau-nívókat az $S = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$ esetekben! Mutassuk meg, hogy a spektrum szimmetrikus az $E = 0$ energiára! Mutassuk meg, hogy ha S egész, akkor mindig van zérus energiájú Landau-nívó, míg félegész S-re nincs!
Útmutatás: használjuk a keltő és eltüntető operátorokat!

(Cserti József)

34. A pozitrónium egy olyan „hidrogénatom", amelyben a proton helyett egy pozitron játssza az „atommag" szerepét. Pozitrónium létezik, csak érthető módon nem él végtelen sokáig: nanoszekundumok alatt annihilál egymással az elektron és a pozitron, és az esetek jelentős részében két foton marad vissza, amelyek a tömegközépponti rendszerben egymással ellentétes irányban repülnek szét. Olyan kísérletet végzünk, amelyben sok pozitrónium-atom repül a tér minden irányában egy adott sebességgel, és mérjük az annihilációból származó fotonok energiaeloszlását egy detektorral (ez általában egy nagy tisztaságú germanium kristály). Feltételezhetjük, hogy minden detektált foton két-fotonos annihilációs folyamatból származik. Mekkora a detektált fotonok legkisebb, legnagyobb és átlagos energiája? Milyen görbét kapunk a fotonok energiaeloszlására?

(Major János, az Ortvay verseny egyik alapítója)

35. A görög atomisták egy sajt darabolásával akartak eljutni az oszthatatlan atomig. Tervezzünk olyan kísérletet, amelyben egy adott anyagmennyiséget ellenőrizhető módon a lehető legkisebb darabra tudunk lefaragni, úgy hogy közben minimalizáljuk a vágásoknál keletkező veszteséget! Az anyag szabadon választható (a törvényes keretek között), de fontos, hogy a végeredmény ellenőrizhető legyen. A cél a legkevesebb atomból álló anyagdarab. Javasoljunk olyan szabályrendszert, amivel értékelni lehet a megoldásokat!

(ifj. Radnóczi György)

36. Egy V térfogatú edényt, melynek falán egy A felületű lyuk van, ritka gáz tölt ki. Határozzuk meg az időegység alatt kiszökő részecskék arányát, ha a sebességeloszlásuk tetszőleges! Mi az eredmény azonos sebességű részecskék esetén? Hogyan változik ekkor a bent maradó részecskék száma időben?

(Tél Tamás)

37. Az Intergalaktikus Kutatóközpont Plazmafizikai Osztályán dolgozó fizikusok a kutatóintézet raktárának takarítása során egy gáztartályra akadtak. A tartály címkéje már évekkel ezelőtt leeshetett, annyit viszont sikerült kideríteni, hogy valószínűleg a hidrogén valamely izotópját tartalmazhatja. Azt, hogy mely izotópról van szó, a következő mérési elrendezéssel próbálják eldönteni: egy, az ismeretlen gáz mintáját tartalmazó, szabályozható kályhát felfűtenek akkora hőmérsékletre, hogy a hidrogénmolekulák atomokra esnek szét és ionizálódnak. Egy ködkamrát homogén mágneses térbe helyeznek, majd hozzáillesztik a kályhához úgy, hogy a kályha szűk nyílásán kilépő részecskék a ködkamrába jussanak. A ködkamrában történt eseményekről fényképfelvételt készítenek, ezeket felhasználják a részecskék pályája görbületi sugarának számolásához. Határozzuk meg, mekkora a görbületi sugarak aránya, ha a tartályban lehet prócium (^{1}H), deutérium (^{2}H), illetve trícium (^{3}H)? Észre lehet-e venni ezzel a módszerrel, ha tiszta izotóp helyett kétkomponensű keverék van a tartályban? A kályha hőmérsékletét és a mágneses indukció nagyságát pontosan nem ismerjük, de tudjuk, hogy mindkettő nagyon jól reprodukálódik a többször elvégzett mérések során.

(Barankai Norbert)

38. A Lorentz invariancia legenyhébb sérülése az egyes részecskék határsebességének kis eltérésével valósul meg:

$$E_s^2 = (p_s c_s)^2 + (m_s c_s^2)^2,$$

ahol c_s ugyanúgy a részecskét jellemző állandó, mint az m_s tömeg (az s index az egyes részecskefajtákra utal). A kinematika vizsgálatával belátható, hogy szokatlan folyamatok bekövetkezése vagy megszokott folyamatok furcsa viselkedése jelezné ezt a helyzetet.

1) A semleges pion fő bomlási módusa a $\pi^0 \to 2\gamma$ kétfotonos bomlás. Amennyiben $c_\pi < c_\gamma$, fellép a foton instabilitása a $\gamma \to \pi^0 + \gamma$ reakció révén is. Adjuk meg e folyamat küszöbenergiáját (a legkisebb energiát, amelyen fellép) a Lorentz-invariancia sérülését jellemző kis $\delta \equiv (c_\gamma^2 - c_\pi^2)/c_\gamma^2 \ll 1$ paraméterrel kifejezve.

2) Az elektromosan töltött pionok a $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$ gyenge kölcsönhatási folyamattal bomlanak. Ez a bomlás a Lorentz-invariáns esetben energetikailag megengedett. Vizsgáljuk egy relativisztikusan nagy impulzusú pion ($p_\pi c_\pi \gg m_\pi c_\pi^2$) bomlásának kinematikáját a $c_\nu \neq c = c_\pi = c_\mu$ esetben. Kialakul-e küszöbhatás, ha $c_\nu > c$, azaz van-e alsó korlát a repülő pion energiájára? Ha igen a válasz, akkor fejezze ki a korlátot a $\delta \equiv (c_\nu^2 - c^2)/2c_\nu^2 \ll 1$ paraméterrel! Mi a helyzet, ha $c > c_\nu$?

(Patkós András)

39. Az olaszországi Gran Sasso alagútban működő OPERA kísérlet bejelentése szerint a 730 km-re található CERN-ből a neutrínók 60 ns-mal korábban érkeznek meg, mint ahogy azt vákuumbeli fénysebességű terjedésből számolnánk. A neutrínók sebessége kb. $2{,}5 \times 10^{-5}$ arányban haladja meg a fény sebességét. Egyкövi Berta híres korábbi névrokona általános elméletét ismerve úgy gondolja, hogy az anomális effektust megmagyarázhatná az is, hogy a neutrínók változó gravitációs potenciált éreznek útjuk során a Föld belsejében. Épp felütötte a nagy fekete könyvsorozat (Landau) 2. kötetét a szükséges összefüggések ellenőrzéséhez, amikor a kedvenc főzőműsorában készített feketeerdő- (Schwarzwald) torta látványa elragadta a számolásaitól. Igaza lehet-e Bertának, van-e ilyen effektus és milyen nagyságrendű, mekkora?

(Cynolter Gábor)

40. Egy öregecskedő ember azon gondolkodik, hogyan élje fel megtakarított pénzét hátralévő éveiben. Ha túl gyorsan költ, öreg napjaira koldusbotra jut, ha túl lassan, és idő előtt meghal, akkor nem élvezte ki termékeny évei gyümölcsét. Fogalmazzuk meg a dilemmát mint egy optimum-keresési feladatot! Egy lehetséges, időben diszkretizált modell a következő. Tegyük fel, hogy emberünk t_0 éves, és M_0 forint tőkével (megtakarítással) rendelkezik! Legyen halálának (véletlen) éve τ! Választott stratégiája szerint, t_0 és τ között minden évben elkölt $S(t)$ forintot, ami persze mindig kisebb, mint az évben még meglévő $M(t)$ tőke. Ezért a következő évben $M(t+1) = M(t) - S(t)$. Definiáljuk az integrált életélvezetet (U), amit maximalizálni igyekszünk, a következőképpen:

$$U = E\Big[\sum_{t=t_0}^{\tau} \ln \frac{S(t)}{A}\Big],$$

ahol $E[\cdot]$ a várható érték a véletlen halálozás szerint, A egy skála-paraméter, ami azt mondja meg, hogy mi az az éves összeg, ami felett (alatt) az életélvezet pozitív (negatív).

a) Mi az optimális $S(t)$ költési stratégia? Ábrázoljuk $S(t)$-t különböző t_0 éves emberekre! Diszkutáljuk az eredményt!

Most tegyük fel, hogy emberünk eltartási szerződést köt egy nagy céggel! Befizeti az M_0 megtakarítást, és ezért a cég fizet neki évente fix J járadékot a haláláig. A cég úgy árazza be a járadékot, hogy várható értékben nulla nyereségű legyen számára az üzlet, plusz rárak egy kis különbözetet.

b) Határozzuk meg a járadék összeget! Mekkora az integrált életélvezet a fix járadék esetében? Előnyös az eltartási szerződés kötése? Diszkutáljuk az eredményt!

c) Javasoljunk kiegészítéseket, módosításokat a modellben, amivel általánosabb, illetve realisztikusabb esetek is tanulmányozhatók! Mutassunk eredményeket is legalább az egyik kiegészítéssel!

Használjunk valós halálozási statisztikákat! Például USA adatok itt találhatók:

`http://www.cdc.gov/nchs/products/life_tables.htm`

Különböző országok adatai itt találhatók:

`http://www.lifetable.de/cgi-bin/datamap.plx`

Hanyagoljuk el az inflációt, (vagy képzeljük úgy, hogy a tőke éppen az inflációt ellensúlyozó kamattal van befektetve, és reálértékkel számolunk)!

(Bihary Zsolt)

41. A kis egyenlítői ország közismerten emberbarát diktátora, dr. Absoluto Zero új, a világ csodálatát kiváltó létesítménnyel gazdagította Gumipart szorgos népét (és a Port Goomyba látogató turistákat): megépíttette a világ első nyílegyenes hullámvasútját. Állami főfizikusa, dr. Ali Tudde Mynek éveken át tanulmányozta a nyugati vidámparkok divatos trendjeit, és megállapította, hogy a fel-le hullámzó, körbeforgó és kanyargó hullámvasutak divatja már a múlté. A nép leginkább azokat a – hullámvasútnak csak némi jóindulattal nevezhető – létesítményeket keresi, ahol a turistákkal megrakott kocsikat felhúzzák egy hatalmas torony tetejére, ott egy pillanatra nyugodni hagyják (közben az utasok sikongatnak), majd majdnem szabadeséssel útnak indítják a föld felé. A pálya később vízszintesbe hajlik, és a kocsi lefékeződik.

– Ez az, nekünk is ilyet kell építenünk, csak sokkal nagyobbat! – döntött pillanatok alatt a diktátor. – Szorgos népünk egyenes jelleme azonban nem engedi meg, hogy a földhöz közeledő kocsi pályáját eltérítsük. Nyílegyenesen, és zummbele, ahogy drága apám, dr. Absoluto Mínusz Egy tanított gumimókusra vadászni a gumipálmák sűrűjében. No meg az is kétségtelen, hogy a gumiparti hullámvasút pályáját nemzeti jelképünk, a gumipálma törzséből kell építenünk. Az pedig nyílegyenes, mint népünk jelleme. A részleteket magára bízom – mondta az elnök a főfizikusnak, aki nagyot sóhajtva látott neki a tervezésnek.

A projekt erősen megcsapolta Gumipart nemzeti jövedelmét (különösen a két űrállomás és a turisták számára készített nemzeti színű szkafanderek), de hamarosan ott állt Port Goomy főterén a dr. Absoluto Zero-ról elnevezett nyílegyenes hullámvasút „Nyílegyenesen a Jövőbe!” felirattal ellátott központi épülete. A tökéletesen olajozott, súrlódásmentes sínek innen vízszintesen indultak keletre és nyugatra, majd a gumipálmák törzseinek büszke irányát követve, továbbra is nyílegyenesen haladva lassan elhagyták a felszínt, és kiemelkedtek a légkör fölé, egészen a szinkronpályáig, ahol az erre a célra felbocsátott két gumiparti mesterséges holdon végződtek.

Az utasokat idáig húzták fel csörlővel (a hosszú út során a dr. Absoluto Zero által írt Rózsaszínű könyvből vett idézetek felolvasásával szórakoztatták őket, a szkafandernek ezt a beépített funkcióját nem lehetett kikapcsolni), majd egy röpke percnyi megállás után (amikor is a száz méter hosszú hullámvasúti szerelvény elejét hozzákapcsolták a szinkronpályán mozgó űrállomáshoz) megkezdődött a zuhanás a Föld, pontosabban Port Goomy főtere felé. (A légellenállással szerencsére nem kellett számolni, mert azt a politikai ellenállás más formáival együtt dr. Absoluto Zero már korábban betiltotta.) A főtéren átzúgó szerelvény útja a másik műholdon ért véget (innen az utasok kötélhágcsón ereszkedtek le a Földre, ehhez külön jegyet kellett váltaniuk a dr. Absoluto Zero-ról elnevezett Nemzeti Kalandpark alkalmazottaitól).

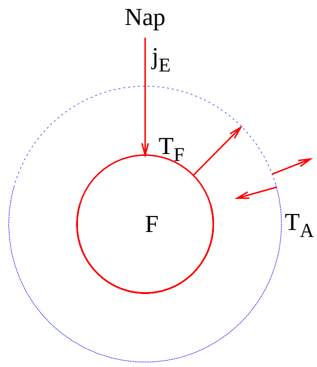
a) Mennyi ideig tartott egy ilyen utazás (műholdtól műholdig)?

b) A világ legelső nyílegyenes hullámvasútjának sikerén felbuzdulva dr. Absoluto Zero további példányokat is készíttetett belőle (természetesen ezekhez is gumipálma törzseket használtak építőanyagul), és mérsékelt égövön uralkodó kollégáinak ajándékozta őket (műholdat azért nem adott hozzájuk). A megajándékozottak közül egyesek (politikai orientációjuknak megfelelően) kelet–nyugati, mások észak–déli irányban állították fel fővárosuk főterén a „Nyílegyenesen a Jövőbe!” márkájú hullámvasutakat. Ám a pályák kipróbálásakor furcsa, az Egyenlítőn fekvő Gumiparton nem tapasztalt problémák léptek fel, amelyek megakadályozták ezen országok szorgos népét, hogy a gumipartiakhoz hasonlóan élvezhessék a nyílegyenes hullámvasút örömeit.
Mi történhetett, és miért?

(Dávid Gyula)

42. Tervezzünk saját klímamodellt!

(0) Nulladik közelítésként határozzuk meg a Föld felületi hőmérsékletét (T_F) abból a feltételezésből, hogy a Föld feketetestként viselkedik, s a bejövő és a kimenő energiaáramok egyensúlyban vannak (a Napból jövő sugárzás energiaáram-sűrűsége a Földnél egyenlő a Napállandóval: $j_E = 1{,}36 \cdot 10^3\,\mathrm{Js^{-1}m^{-2}}$).



Az eredmény aggasztó (fáznánk).

(1) A helyzetet javítandó, vegyük figyelembe az üvegházhatást, mint jótékony effektust. Tegyük fel, hogy a Föld körül van egy „üvegház” gázréteg (kék körrel jelölve az ábrán), amelyen keresztül a Napból jövő sugárzás (nagyrészt magas frekvenciás, mivel a Nap hőmérséklete magas) áthatol, viszont a Földről jövő sugárzás (alacsony frekvenciás, mivel a Föld hőmérséklete alacsony) teljesen elnyelődik, majd izotróp módon minden irányban szétsugározódik. A gázréteg a sugárzása is feketetest sugárzás, amelynek T_A hőmérsékletét a Föld felszínének T_F hőmérsékletével együtt a sugárzási egyensúly alapján határozhatunk meg.

Az eredmény ismét aggasztó (melegünk lenne).

(2) Ennyi sikertelenség után kénytelenek vagyunk sekélyebb vizekre evezni, s olyan modellt bevezetni, amelyben be tudjuk állítani T_F-et a megfigyelt $T_\mathrm{F} = 15\,^\circ\mathrm{C}$-ra. Új elemként vegyük figyelembe az albedót (α), ami meghatározza, hogy a bejövő sugárzás hányad része verődik vissza a magas frekvenciás tartományban anélkül, hogy részt venne a Föld energiaháztartásában. Ekkor a bejövő energiaáram

$$j_E(\text{igazi}) = (1-\alpha)j_E\,.$$

Az albedó függ a Föld felületének hőmérsékletétől, $\alpha = \alpha(T_\mathrm{F})$, hiszen pl. a jégkorszakok idején a hatalmas jégmezők növelik az albedót, magas hőmérsékleten pedig sok víz párolog el, s a felhőtakaró nagysága lényegesen változhat, ami szintén változtatja az albedót. Sajnos a felhők hatását jelenleg még nem teljesen értjük. Egyrészt növelhetik az albedót a direkt sugárzás-visszaverésen keresztül, másrészt a felhőknek erős üvegházhatásuk is van, ami effektíve az albedó csökkenésével ekvivalens. Az, hogy melyik hatás dominál, a felhők fajtájától és keletkezésük magasságától is függ. Ezért az $\alpha = \alpha(T)$ függvényt nem igazán ismerjük.

Konstruáljunk olyan $\alpha(T)$ függvényt, aminek az $\alpha(T_\mathrm{F} = 15\,^\circ\mathrm{C})$ értéke megadja a jelenlegi $T_\mathrm{F} \approx 15\,^\circ\mathrm{C}$ átlaghőmérsékletet a Földön. Az $\alpha(T)$ alakjától függően ez a hőmérsékletet stabil vagy instabil lehet. Konstruáljunk olyan katasztrófa-szcenáriókat, amelyek eredményeképpen megfagyunk, vagy megsülünk!

Az eredményeket semmi esetre se közöljük a sajtóval!

(Rácz Zoltán)

\end{document}